# Семинар 8. Линейные рекуррентные соотношения

## Примеры на ЛОРС

1) 

Характеристическое уравнение:



Раскладываем на множители:



Общее решение соотношения:

.

2) .

Характеристическое уравнение:



Многочлен  имеет три корня, один вещественный и два комплексных:

 .

Характеристический многочлен соотношения имеет эти же корни, но каждый корень имеет кратность 2.

В итоге общее решение соотношения будет иметь вид:



## Разбор задачи ДЗ

Для соотношения



найти:

1) частное решение соответствующего однородного соотношения при начальных условиях

;

2) общее решение данного неоднородного соотношения.

**Замечание**. Исходное соотношение могло быть задано и в такой форме:



при начальных условиях .

При этом, однако, частное решение получилось бы иным в силу того, что члены последовательности нумеруются с нуля, а не с единицы.

Решение

Характеристическое уравнение

,

то есть

,

откуда .

Общее решение однородного соотношения:



Удовлетворяем начальным условиям:



Умножая 1-е уравнение на 2 и складывая со 2-м, получим , откуда 

Итак, частное решение однородного соотношения при заданных начальных условиях имеет вид:



Методом подбора ищем частное решение неоднородного соотношения. Правая часть есть полином 2 степени, умноженный на тривиальную экспоненту с основанием 1. Это важный момент, так как, если бы среди корней характеристического уравнения была единица, то вид частного решения был бы другим по сравнению с тем, как его следует представить в данном случае, а именно:



Умножать эту функцию ни на какую степень n не нужно, так как единица (основание экспоненты) не является корнем характеристического уравнения.

Неизвестные коэффициенты квадратного трехчлена определяем, подставляя написанное выше выражение в исходное соотношение:



Раскрываем скобки:



Приравниваем коэффициенты многочленов при одинаковых степенях n:



Итак, общее решение неоднородного соотношения имеет вид:



По поводу рассмотренного решения полезно заметить следующее.

Если бы исходное соотношение имело вид

,

то число 1 было бы двукратным корнем характеристического уравнения, и частное решение неоднородного соотношения пришлось бы искать в виде .

## Дальнейшие примеры

1. Решить ЛОРС при начальных условиях:



Перепишем в виде:

.

Характеристическое уравнение:



.

Общее решение:



Система для определения произвольных констант:



Умножая 1-е уравнение на 4 и вычитая из него 2-е, получим:



Итак, искомое частное решение:

.

2) Рассмотрим теперь такой пример: найти общее решение соотношения

.

Здесь есть одна тонкость: в правой части, к которой применим метод подбора, показатель степени в экспоненте должен быть равен n. Поэтому, правую часть следует преобразовать так:



Понятно, что число 4 является двукратным корнем характеристического уравнения

,

и частное решение неоднородного соотношения ищем в виде:

.

При подстановке в соотношение получим:



Сокращая на , получим:



Предлагается закончить решение самостоятельно.

3) Определить вид общего решения неоднородного соотношения:

 .

Характеристическое уравнение:

.

Вид правой части таков, что может потребоваться проверка корней 4-й степени из -2, поэтому можно поискать разложение характеристического многочлена на множители таким образом:



Таким образом,



Корни 4-й степени из -2 находятся в вершинах квадрата, вписанного в окружность радиуса  с центром в нулевой точке, диагонали которого идут вдоль биссектрис координатных углов. Это две пары комплексно-сопряженных чисел:

 и



Следует заметить, что от значения аргумента, большего , следует отнять , чтобы попасть в диапазон главных значений аргумента . Например, при  в написанной выше формуле корней получим:



Общее решение однородного соотношения:

 .

Чтобы найти частное решение неоднородного соотношения, разобьем правую часть на три слагаемых и воспользуемся принципом суперпозиции.

Именно, правая часть ,

где



Первая функция есть многочлен 3-й степени, умноженный на тривиальную экспоненту с основанием «единица». Так как число 1 является двукратным корнем характеристического уравнения, то соответствующее слагаемое в частном решении будет иметь вид:



Для функции , учитывая, что комплексное число (точнее, комплексно-сопряженная пара)  не является корнем характеристического уравнения, получим такое слагаемое в частном решении:



Наибольшая степень многочлена при тригонометрических функциях равна 2(!).

И, наконец, для последнего слагаемого правой части ищем частное решение в виде:



Умножение всего квазиполинома на n возникает из-за того, что комплексно-сопряженная пара - простые корни характеристического уравнения.

В итоге получаем вид общего решения исходного соотношения:

.

В частном решении, заметим, содержится 18 неопределенных констант(!).

4) Найти частное решение неоднородного соотношения по начальным условиям:



(«Элем. комбинаторики», метод. указ., стр. 32, задача 2б).

Характеристическое уравнение:



Корень  кратности 3.

Общее решение однородного соотношения:

.

Методом подбора ищем частное решение неоднородного соотношения:

.

Чтобы найти константу , подставляем записанную выше функцию в исходное соотношение:



Сокращая на , получим:

.

Для определения константы  достаточно приравнять свободные члены:

,

откуда .

Итак, общее решение исходного неоднородного соотношения имеет вид:



Теперь, имея общее решение неоднородного соотношения, можно найти константы «интегрирования», удовлетворяя начальным условиям.



Систему проще всего решить методом Гаусса:



Итак, получаем частное решение для заданных начальных условий:



Следует подчеркнуть, что неверно было бы сначала найти частное решение однородного соотношения по заданным начальным условиям, а потом, найдя методом подбора частное решение неоднородного соотношения, полученные результаты сложить. Получилось бы решение, но, вообще говоря, не то, что удовлетворяет начальным условиям для неоднородного соотношения.

5) Записать в общем виде решение соотношения



(“Элем. Комбинаторики», стр.33, задача 3а).

Характеристическое уравнение:



Вид правой части подсказывает, что имеет смысл испытать 2 как корень.

Выполняя деление (уголком или по схеме Горнера), получим:

,

то есть 2 есть корень характеристического уравнения.

Многочлен 3-й степени можно разложить на множители группировкой членов:



Итак, имеем:



Мы получаем вещественный корень  кратности  и два комплексно-сопряженных корня .

Общее решение однородного соотношения будет иметь вид:

.

Частное решение неоднородного соотношения подбираем, используя принцип суперпозиции.

Для слагаемого  получим решение



(квадратный трехчлен с неопределенными коэффициентами).

Для слагаемого  получим решение

.

Собирая всё вместе, получим (в общем виде) общее решение неоднородного соотношения:



## Сумма квадратов

Выведем формулу для суммы квадратов первых n натуральных чисел

.

Имеем рекуррентное соотношение:

 при начальном условии .

Характеристическое уравнение:

.

Общее решение однородного соотношения . Это надо учесть при определении вида частного решения неоднородного соотношения, так как в правой части скрыта экспонента с единичным основанием.

Поэтому частное решение неоднородного соотношения ищем в виде

.

Для определения коэффициентов  подставляем записанное выше выражение в исходное соотношение:



Раскрывая скобки, получим:

,

откуда

.

Итак, общее решение неоднородного соотношения

.

Учитывая начальное условие, получаем, что .

Получаем решение:



## Определение числа слов заданной длины в некотором алфавите, которые обладают специальным свойством

**Задача**. Найти число слов длины  в алфавите , которые не содержат двух букв  подряд.

**Решение**. Нетрудно догадаться, что множество всех слов с заданным свойством определяется следующим уравнением в полукольце регулярных языков:



Это уравнение можно рассматривать, как определение такого множества слов – назовем эти слова правильными - по индукции:

1. пустое слово – правильное;
2. если - правильное слово, то слова  и - правильные;
3. других правильных слов не существует.

Теперь, если через - число слов длины  с заданным свойством, то по записанному выше уравнению составляется такое рекуррентное соотношение:

 при начальных условиях .

Это надо понимать так.

Слово длины  с заданным свойством может начинаться на букву  или на букву . В первом случае после буквы может идти любое правильное слово, длина которого будет равна , а во втором после первой буквы должна обязательно идти буква , после которой может идти любое правильное слово, длина которого будет уже равна . Начальные условия означают, что единственное правильное слово нулевой длины – пустое, и существуют два правильных однобуквенных слова:  и .

Заметим, что полученное рекуррентное соотношение точно такое же, как то, что определяет последовательность Фибоначчи, но с другими начальными условиями. И эта последовательность опережает на один номер последовательность Фибоначчи, то есть -й член нашей последовательности равен ()-му члену последовательности Фибоначчи:



Можно последовательно перечислять правильные слова.



И т. д.

Можно вывести и явную формулу, найдя неопределенные константы из начальных условий.



Отсюда можно получить:

.

Заметим, что решение уравнения с регулярными коэффициентами, записанное в начале решения задачи, имеет вид:

,

что совпадает с результатом анализа соответствующего конечного автомата (см. лекцию № 18).

Полученное решение можно использовать при определении числа слов длины в том же алфавите, которые содержат две буквы  подряд.

Обозначим число таких слов через . Тогда очевидно, что , где - рассмотренная выше последовательность. То есть из числа всех слов длины в алфавите надо отнять число слов той же длины, которые не содержат вхождений двух букв  подряд.

Так как , то, используя полученное выше рекуррентное соотношение, получим:

,

откуда

.

Записывая правую часть этого неоднородного соотношения в виде , методом подбора ищем частное решение в виде(число 2 не является корнем характеристического уравнения, оба корня которого иррациональны).

Имеем:

.

Итак, общее решение неоднородного соотношения имеет вид:

.

Начальные условия нулевые, то есть .

Получается такая система для определения произвольных констант:



Решая систему, получим:

.

По самому соотношению также можно вычислять последовательно:



Заметим, что последовательность растет существенно быстрее последовательности Фибоначчи.

См. еще примеры в методических указаниях:

А.И. Белоусов, П.А. Власов. Элементы комбинаторики: метод. указания к выполнению домашнего задания. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – С. 17-20.

Рекомендуется самостоятельно решить такую задачу: *составить рекуррентное соотношение для числа слов заданной длины n в алфавите {a, b}, которые не содержат вхождений слова aba.*

##### Дополнение. Методы поиска частного решения неоднородного соотношения

Опишем здесь метод подбора частного решения, вполне аналогичный таковому в теории линейных дифференциальных уравнений.

1. Если правая часть соотношения (12) имеет вид , где  - полином степени  от , причем  есть действительный корень кратности  характеристического уравнения, то частное решение неоднородного соотношения следует искать в виде:

, (13)

где  - полином степени  от  с неопределенными коэффициентами.

Если же число не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищут в виде:

. (14)

1. **Тригонометрическая неоднородность**: если правая часть соотношения имеет вид

, (15)

то, если комплексное число  не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного соотношения ищется в виде

, (16)

где  - полиномы степени  с неопределенными коэффициентами.

Если же число есть корень характеристического уравнения кратности , то указанное выше выражение (16) для функции  следует умножить на .